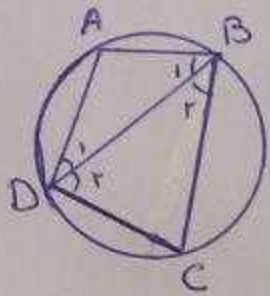


بنابراین حجم، مساحت محدود به سطح مقطع دایره برابر است:

$$V = 20\pi - \frac{9}{2}\pi = \frac{31}{2}\pi = 15,5\pi$$

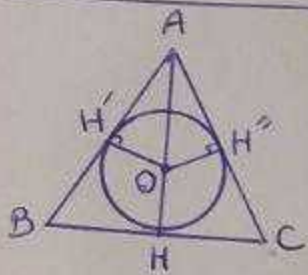


۱۲۸ - گزینه ۴
هر چه دایره بزرگتر باشد، مرکز دایره نزدیکتر است. بنابراین AB کوچکترین ضلع و BC بزرگترین ضلع چهارضلعی است.

$$\Delta ABD: AB < AD \Rightarrow \hat{D}_1 < \hat{B}_1$$

$$\Delta BDC: BC > CD \Rightarrow \hat{D}_2 > \hat{B}_2$$

با توجه به دو رابطه فوق، نمی‌توان نتیجه گرفت که $\hat{B} > \hat{D}$



۱۲۹ - گزینه ۲
مطابق شکل $OH = OH' = OH'' = 3$

و در نتیجه $OA = 5$ است.

$$\Delta OAH': AH'^2 = OA^2 - OH'^2 = 25 - 9$$

$$\Rightarrow AH'^2 = 16 \Rightarrow AH' = 4$$

حال اگر $BH = HC = x$ فرض شود، با توجه به آن که میسازد، هر دو رسم شده از یک نقطه برداشته، برابر یکدیگرند.

$$AH'' = AH' = 4$$

$$BH' = BH = CH = CH'' = x$$

اگر S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث باشد، آن‌گاه:

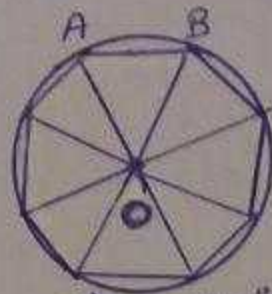
$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow r = \frac{\frac{1}{2} \times 4 \times 2x}{4 + 2x}$$

$$\Rightarrow 12 + 4x = 4x \Rightarrow 2x = 12$$

بنابراین طول قاعده مثلث متساوی الساقین ABC ،

برابر ۱۲ است.

۱۲۵ - گزینه ۱



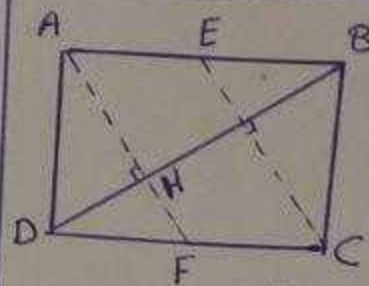
مطابق شکل، هشت ضلعی منتظم به هشت مثلث هفتی و در نتیجه هم مساحت تقسیم می‌شود. داریم:

$$\hat{AOB} = \frac{360}{6} = 60^\circ$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{هشت ضلعی}} = 8 S_{OAB} = 8\sqrt{3}$$

۱۲۶ - گزینه ۱



$$\Delta ABD: BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$\Rightarrow BD^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow BD = 5$$

$$\Delta ABD: AD^2 = BD \cdot DH \Rightarrow 9 = 5 DH$$

$$\Rightarrow DH = \frac{9}{5} \Rightarrow BH = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\Delta ABD: AH^2 = BH \cdot DH = \frac{16}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{144}{25}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{H} = \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AHD \sim \Delta ADF$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{DH}{DF} \Rightarrow \frac{\frac{12}{5}}{5} = \frac{\frac{9}{5}}{DF}$$

$$\Rightarrow DF = \frac{9}{8} = 1,125 \Rightarrow CF = 5 - 1,125 = 3,875$$

$$S_{AEFC} = AD \cdot CF = 3 \times 3,875 = 11,625$$

۱۲۷ - گزینه ۲

شکل حاصل از دوران مستطیل، استوانه‌ای به ارتفاع ۵ و شعاع قاعده ۲ و شکل حاصل از دوران نیم دایره، کره‌ای به شعاع $\frac{3}{2}$ است. داریم:

$$V_{\text{استوانه}} = \pi (2)^2 \times 5 = 20\pi$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 9\pi$$

تصویر دایره‌ی $C(O, R)$ که در آن $O = (1, 2)$

و $R = 1$ است، تحت تبدیل $T(x, y) = (x, y)$

دایره‌ی $C(O', R')$ است که در آن $O' = (3, 2)$

و $R' = 2$ باشد. داریم:

$$d = OO' = \sqrt{(3-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{طول کمان مشترک} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{2 - (1-2)^2} = \sqrt{16} = 4$$

اگر زوایای بردار a و b با محورهای x و y را به ترتیب

α و β و γ نامیم، آن‌ها داریم:

$$\cos \alpha = \cos \beta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{لامانه}} \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین بردار مورد نظر به صورت $b = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

در نظر گرفته می‌شود. داریم:

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{2}}{1} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= 4(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (2, 2, 2\sqrt{2})$$

اگر خطی با صفحه‌ی مفروض موازی باشد، آن‌گاه

آن خط لا اقل با یک خط از آن صفحه موازی است.

بنابراین عکس قضیه‌ی مطرح شده در گزینشی ۲

صحت است.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{y+4}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

خواهد بود. با انتخاب نقطه‌ی $A_0(0, -4, 0)$ بر روی این خط (مضرب مشترک) داریم:

$$A(1, 3, 2) \Rightarrow \vec{A_0A} = (1, 7, 2)$$

$$A_0(0, -4, 0)$$

بردار هادی خط به صورت $u = (1, 2, 0)$ است.

$$\vec{A_0A} \times u = (1, 7, 2) \times (1, 2, 0) = (-4, 2, -5)$$

$$u = (1, 2, 0)$$

$$D = \frac{|\vec{A_0A} \times u|}{|u|} = \frac{\sqrt{16+4+25}}{\sqrt{1+4+0}}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3$$

اگر وسط‌های اضلاع مثلث ABC را نقاط M ،

N و P بنامیم، آن‌گاه هر صفحه‌ای که از دو نقطه

از این سه نقطه عبور کند، از رئوس مثلث

ABC به یک فاصله است. حال کافی است

از نقطه‌ی M دو پاره‌خط MN ، خطی موازی با خط Δ

رسم کنیم. صفحه‌ی گذرنده بر MN و خط موازی با

Δ ، از سه نقطه‌ی A ، B و C به یک فاصله

بوره و قطعاً با خط Δ موازی است. به طور

مشابه برای هر کدام از دو پاره‌خط MP و NP

نیز می‌توان چنین صفحه‌ای پیدا کرد.

با توجه به آن که خط به معادله $2x + 2y = a$ بر خط $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ مماس است، پس این خط تمام برداشته بوده و در نتیجه از مرکز دایره عبور میکند.

$$x^2 + y^2 - 2x + y = 1 \rightarrow O(1, -\frac{1}{2})$$

$$2(1) + 2(-\frac{1}{2}) = a \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{1}{2}(A + A^t) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

با استفاده از رابطه کسوس برای دترمینان این

ماتریس داریم:

$$D = (1 \cdot 5 + 0 + 0) - (0 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 0) = 22$$

با افزودن سطر یک واحد به هر یک از درایه های سطر

ماتریس A، به دترمینان ماتریس به اندازه مجموع

همان زده های درایه های سطر دوم اضافه می شود.

داریم:

$$A_{11} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = -9 + 0 + 6 = -3$$

$$\begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-15^\circ) & -\sin(-15^\circ) \\ \sin(-15^\circ) & \cos(-15^\circ) \end{bmatrix}$$

$$= R(-15^\circ)$$

$$R_{(-15^\circ)}^{12} = R_{11 \times (-15^\circ)} = R_{-18^\circ} = R_{18^\circ} = I$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ 5x + 4y + z = 9 \end{cases}$$

با حذف کردن متغیر z، بنابراین معادلات اول و دوم را بار دیگر بین معادلات دوم و سوم داریم:

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$

$$x^2 + \sqrt{3}xy = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y')^2 + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y')(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y') = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}x'^2 + \frac{1}{4}y'^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x'y' + \frac{3}{4}x'^2 - \frac{3}{4}y'^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x'y' = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x'^2 - \frac{y'^2}{3} = 1$$

$$c^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow c = 2$$

بنابراین نامنه های کانون مرکز در این هذلولی

برابر $c = 2$ است.

با توجه به آن که $\bar{x} = \bar{y}$ پس داریم یک داده ها

برابر است با $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2} = \frac{324}{44} = 9$

و در نتیجه انحراف معیار داده ها برابر $\sigma = 3$ است.

۱۴۳ - گزینه ی ۴

دنباله به صورت زیر است :

۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ...

بنابراین داریم :

$U_2^2 - U_1 \times U_3 = 1^2 - 1 \times 2 = -1$
 $U_3^2 - U_2 \times U_4 = 2^2 - 1 \times 3 = 1$
 $U_4^2 - U_3 \times U_5 = 3^2 - 2 \times 5 = -1$
 $U_5^2 - U_4 \times U_6 = 5^2 - 3 \times 8 = 1$

بنابراین حاصل $U_n^2 - U_{n-1} \times U_{n+1}$ به صورت $(-1)^{n+1}$ است.

۱۴۴ - گزینه ی ۲

اگر ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و یک مهره سبز

فارج کرده باشیم، شرط مورد نظر در سوال برآورده

شده است اما با انتخاب مهره ی هفتم یکی از

سه وضعیت (حداقل ۴ مهره سفید یا حداقل ۳ مهره سیاه یا حداقل ۲ مهره سبز) به وقوع پیوسته است.

۱۴۵ - گزینه ی ۳

$A_1 = \{0, 1\}$
 $A_2 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 $A_3 = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
 $A_4 = \{-7, -6, -5, -4, 4\} \cup \{0, 1\}$
 $(A_4 - A_2) \cup A_1 = \{-7, -6, -5, -4, 0, 1, 4\}$
 $= \{-7, -6, -5, -4, 0, 1, 4\}$

$\begin{cases} 4x + 7y = 14 \\ 4x + 7y = 24 \end{cases}$

موضوع این معادلات مربوط به دو خط موازی و غیر منطبق است پس فصل مشترک های دو بردار این سمت ها موازی هستند.

۱۴۱ - گزینه ی ۴

با توجه به آن که تعداد داده ها برابر ۱۳ است،

پس داده های هفتم میانه بوده و در نتیجه چارک اول بین داده های شش و چهارم و چارک سوم بین داده های دهم و یازدهم قرار می گیرد، یعنی نمودار جعبه ای شامل داده های چهارم تا دهم است.

۴، ۲۶، ۳۵، ۳۴، ۳۳، ۳۱، ۲۹

$\bar{x} = \frac{19 + 21 + 22 + 24 + 25 + 26 + 28}{7} = 24$

$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{76}{7} = 10,85$

۱۴۲ - گزینه ی ۲

اگر داده های جامعه اول را با x_i ها و داده های جامعه دوم را با y_i ها نمایش دهیم، آن گاه داریم :

$\sigma_1^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n_1} \Rightarrow 12,6 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{12}$

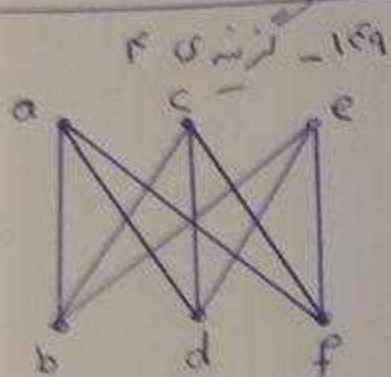
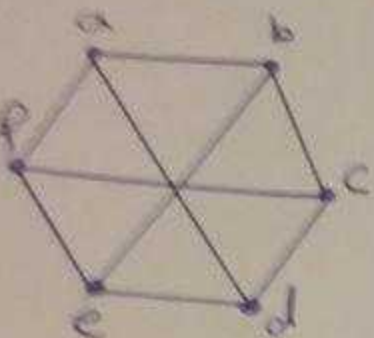
$\Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 151,2$

$\sigma_2^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n_2} \Rightarrow 7,2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{24}$

$\Rightarrow \sum (y_i - \bar{y})^2 = 172,8$

بین مساحت بیاض مورد نظر یعنی $a(A)$ داریم
 $9 \times 9 = 81$ است و داریم:

$$P(A) = \frac{a(A)}{a(S)} = \frac{81}{4} = 20.25$$



دو گراف فوق مرتبط هستند، بین کافی است تعداد
 دورهای به طول ۴ را در گراف سمت راست محاسبه کنیم.
 هر دور به طول ۴ در این گراف، شامل ۲ رأس از بالا
 و ۲ رأس از پایین است، پس داریم:

$$\text{تعداد دورهای به طول ۴} = \binom{3}{2} \times \binom{3}{2} = 3 \times 3 = 9$$

۱۵۰ - گزینه ۳

اگر تعداد رأس های درجه یک را x فرض کنیم،
 آن گاه داریم:

$$q = p - 1 = 4 + x - 1 = 3 + x$$

$$\sum \deg v_i = 2q \Rightarrow 11 + x = 2(3 + x)$$

$$\Rightarrow 11 + x = 6 + 2x \Rightarrow x = 5$$

۱۵۱ - گزینه ۴

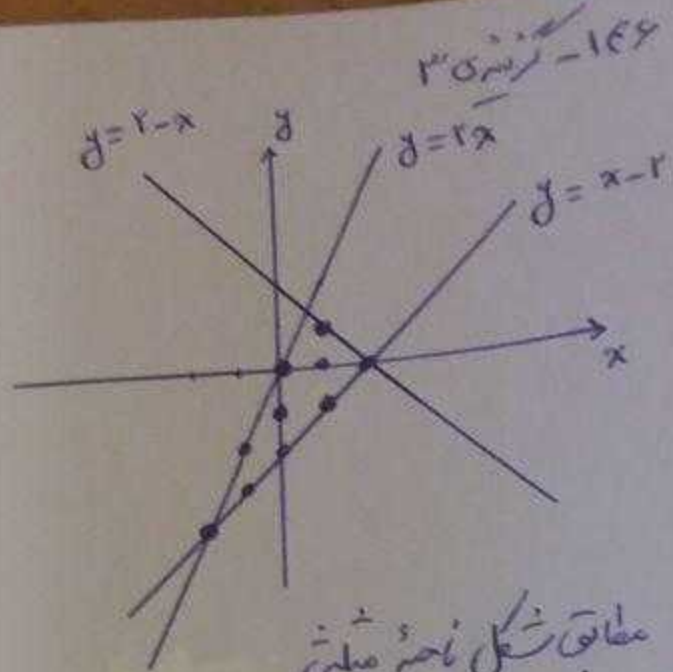
$$(abc)_a = (cba)_a$$

$$\Rightarrow c + 16b + 11a = a + 16c + 11b$$

$$\Rightarrow 10a - 16b = 11c \Rightarrow 10a - 16b = 11c$$

$$\Rightarrow 4(5a - 4b) = 11c$$

بنابراین $c = 4$ است و در نتیجه $5a - 4b = 11$ خواهد بود.
 یعنی $a = 4$ و $b = 4$ است و این جواب در نتیجه ۵، رقم ۷
 وجود ندارد، این حالت نشده است.



مطابق شکل ناحیه مطلوب

بین سه خط جواب مسئله است که
 شامل این ۱۰ نقطه است:

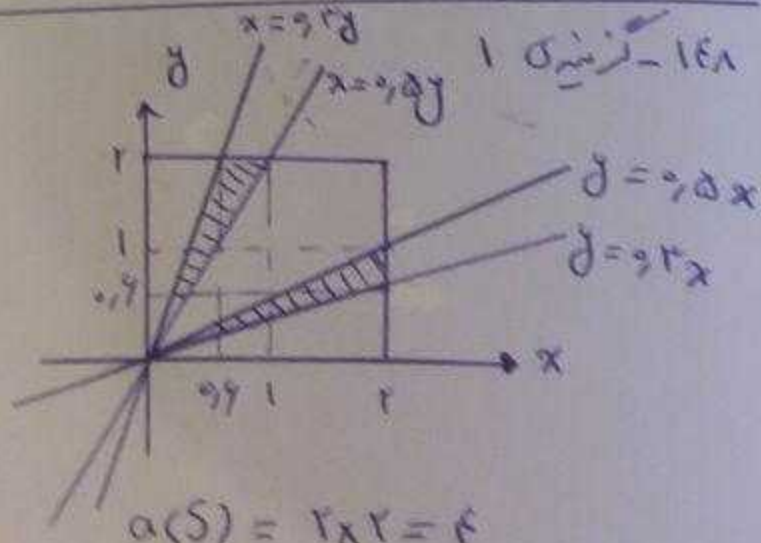
- $(0,0), (1,0), (2,0), (1,1), (0,-1), (-1,-1), (-2,-2), (-1,-2), (-1,-3), (0,-2)$

۱۴۷ - گزینه ۱

اگر بیاض روستون دو سکه را با A و
 بیاض روستون ۶ برای آس را با B بنامیم
 (هم، داریم):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$



$$a(S) = 2 \times 2 = 4$$

مساحت هر یک از دو ناحیه هائیکه مورد توجه قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times 0.5 = 0.5$$

۱۵۲ - گزینه ۲

$$48P + 1 = n^2 \Rightarrow 48P = n^2 - 1$$

$$\Rightarrow 48P = (n-1)(n+1)$$

تعداد حالت های ممکن عبارتند از:

$$\begin{cases} n+1 = 2P \Rightarrow 24 = 2P \Rightarrow P = 12 \\ n-1 = 24 \Rightarrow n = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n+1 = 24 \Rightarrow n = 23 \\ n-1 = 2P \Rightarrow 22 = 2P \Rightarrow P = 11 \end{cases}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

تذکره: در مرحله دوم به جای هر یک از x ها، $+1$ و -1 قرار داده شده است.

۱۵۵ - گزینه ۳

$$P(\{b, c\}) = P(\{a, b, c\}) - P(a) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned} P(\{b, c, e\} | \{a, b, c\}) &= \frac{P(\{b, c, e\} \cap \{a, b, c\})}{P(\{a, b, c\})} \\ &= \frac{P(\{b, c\})}{P(\{a, b, c\})} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

۱۵۳ - گزینه ۴

$$5^3 = 125 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 5^{2n} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 5^n \equiv 1 \pmod{5}$$

$$5^{2n+2} \equiv 5^2 \pmod{5} \Rightarrow 5^2 \equiv 1 \times 25 \equiv -6 \pmod{5}$$

$$5^{2n+4} \equiv 5^4 \pmod{5} \Rightarrow 5^4 \equiv 1 \times (-6) \equiv 4 \pmod{5}$$

$$5^{2n+6} \equiv 5^6 \pmod{5} \Rightarrow 5^6 \equiv 1 \pmod{5}$$

بنابراین عبارت مورد نظر به ازای تمامی مقادیر n

بر 31 بخش پذیر است.

۱۵۴ - گزینه ۱

تعداد حالت های 6 تایی (توپ) در

3 جعبه 3 متماثل قرار می گیرند، برابر تعداد

$$\text{جواب های معادله } x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$\binom{6+3-1}{3-1} = 28 \text{ است}$$

تعداد حالت های 3 جعبه 3 متماثل 3 تایی

$$\text{برابر تعداد جواب های معادله } x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$\text{یعنی } \binom{3+3-1}{3-1} = 10 \text{ است}$$